Métodos Numéricos
1^{ro} de julio de 2022
Recuperatorio
Primer Parcial

DEPARTAMENTO DE COMPUTACION
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

☐ Resolver ejercicios en hojas separadas	Lib. Univ.	Nombre y Apellido			
☐ Completar nombre en las hojas					
☐ Completar LU y nombre en el enunciado	Ej. 1	Ej. 2	Ej. 3	Ej. 4	Nota
☐ **Justificar <u>todas</u> las respuestas**					

1. (a) Sea $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de $\mathbb{R}^n$ y sean $w_1, \ldots, w_n \in \mathbb{R}^m$. Probar que existe una única matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ tal que $Av_i = w_i \ \forall i = 1, \ldots, n$. (5 puntos)
   (b) Sean $S \subseteq \mathbb{R}^n$ y $T \subseteq \mathbb{R}^n$ dos subespacios de $\mathbb{R}^n$ tales que $\mathbb{R}^n = S \oplus T$ (es decir $\mathbb{R}^n = S + T$ y $S \cap T = \{0\}$). Probar que existe una única $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ con $Nu(A) = S$, $Im(A) = T$ y $A^2 = A$. (12 puntos)
   (c) En las condiciones del ítem anterior y asumiendo $T \neq \{0\}$ y $S = T^{\perp}$, calcular $\|A\|$ para cualquier norma inducida $\|\cdot\|$. (8 puntos) $\boxed{\text{Para } \|\cdot\|_2 \text{ inducida}}$

2. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ $(n \geq 3)$ una matriz con los menores principales inversibles, con $a_{ij}^{(k)}$ el elemento (i,j) de A luego de k pasos de eliminación gaussiana y $A_{22}^{(1)} = (a_{ij}^{(1)})_{2\leq i,j\leq n}$.
   (a) Probar que $a_{22}^{(1)} \neq 0$. (8 puntos)
   (b) Supongamos que $A_{22}^{(1)} = B^tB$, siendo $B \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ una matriz inversible con factorización $B = QR$ (Q ortogonal y R triangular superior). Hallar la factorización LU de A. (12 puntos)

3. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ de la forma $A = B^2 + uu^t$ con $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz simétrica inversible y $u \in \mathbb{R}^n$. $\boxed{u \neq 0}$
   (a) Probar que A es simétrica definida positiva. (6 puntos)
   (b) Mostrar que A se puede descomponer como
   $$A = L(I + vv^t)L^t \qquad (1)$$
   con $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ triangular inferior inversible, y $v \in \mathbb{R}^n$. (8 puntos) $\boxed{v \neq 0}$
   (c) Probar que $(I + vv^t)^{-1} = I + avv^t$ para cierto valor de $a \in \mathbb{R}$. (8 puntos)
   (d) Asumiendo conocida la factorización de Cholesky de B^2, describir un procedimiento para resolver el sistema $Ax = b$ que utilice la forma de A descripta en (1). (8 puntos)

4. Sea $Q = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ una matriz ortogonal. Definimos la matriz $H \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ como
   $$H = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ a & b & -a & b \\ \hdashline 0 & 1 & 0 & -1 \\ -b & a & b & a \end{array}\right)\begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$$
   (a) Dadas dos matrices A y B cuadradas, probar que si AB y B son ortogonales, entonces A es ortogonal. (7 puntos)
   (b) ¿Qué condición deben cumplir a y b para que H sea ortogonal? Justificar. (8 puntos)
   (c) Determinar si Q es una matriz de Givens, una matriz de Householder, o ninguna de las anteriores. Justificar en cada caso, especificando qué rotación se realiza si es de Givens, o respecto de qué recta refleja si es de Householder. (10 puntos)